SLdoc-Mrep1

2007/08/23

数理科学専門部会報告書骨子案

I. 報告書をまとめるにあたっての方針

１．全体的な方針

1.1「数理科学」の語は，広い意味での「数学」と同義のものとして用いる

特に必要である場合を除き，一般になじみのある「数学」の用語を用いる。

「数学」の語は，(特に日本で) いわゆる「純粋数学」の意味で用いられることが多い。これに対して「応用数学」の語が用いられるが，そうした「別の数学」があるわけではなく，両者の境界が明確にあるわけでもない。近年数学の用いられる範囲が広がりつつあることから、両者を広く包んだ形での「数理科学」という概念・用語が普及してきている。そもそも数学の印欧語における元来の意味は，「学ばれるべき（価値のある）もの」というギリシャ語に由来し，現在の「数理科学」の語は，この本来の意味への立ち返りとも考えられる。本報告ではこうした状況も考慮し，広い意味で「数学」の語を用いるものとする。

1.2「市民の数学」の視点に立ち，それが何かを具体的に明らかにする

「専門家の数学」と「学校の数学」しか存在していない現状を打破して，「市民の数学」を確立しなければならない (田村二郎, 1976)。これは数学だけではなく，学校教育全体の問題である。OECD の「キー・コンピテンシー」も同じ問題意識に立っている。今回のプロジェクトはその日本における科学教育の場での具体化といえよう。

ここで重要なのは,「社会的存在としての個人」という視点である。英語で言えば“citizen”であり，国あるいはその他の自らが属する社会で責任ある一構成員としてそこでの活動に関わる権利と義務を持つ者のことである。

1.3　一般に抱かれている数学についての「誤解」・否定的見解に配慮する

数学に関し，数学者の側からすれば「誤解」としか思えない，様々の見解（しかも否定的なものが多い）が文系の人々のみならず，理系の人々にも存在する。こうした「誤解」・否定的見解の存在に十分留意した記述を行う。ただし「これは誤解で間違っている」といった記述にならないよう配慮する。

1.4　理想を求め白紙の立場から議論するが，学問的な先行研究は踏まえる

特にこのプロジェクトのモデルである“Science for All Americans”，OECD・PISA の「評価の枠組み」に示された「数学リテラシー」は参考になる。

また日本では特に初等数学教育については詳細な理論的実践的研究の伝統がある。

1.5　最終報告は，できる限り一般の人々に理解できる文章で表現する

本プロジェクトで，科学リテラシーを「成人段階を念頭において，すべての人々が身につけてほしい科学・数学・技術に関係した知識・技能・ものの見方」としている。

一方読者としてはこの科学リテラシー像定着に関わる人々を想定しているので，必要と認める場合には専門用語を用いた。しかしこの文書を元に一般の人々（成人）の読む文書が作られることを想定して，そこに挙げる例は義務教育レベルの知識で理解できるものを主体としている。ただしあくまでも「成人」が読むことを想定するので，具体例は一般的社会常識を前提としたものになる。特に社会的な背景を重視する。これは「市民の数学」という観点から見ても当然のことである。

２．リテラシー像策定基準

2.1　数学的リテラシーの内容とレベル

１．ここで設定する数学的な内容理解の基準を一口に言えば，義務教育修了レベルの数学の基本的な概念や考え方がよく分かっており，その内容を自由に使いこなし，関連する話題を理解し，社会生活の中で応用できることである。より具体的に言えば

・ 日常生活の中で，それらを使って問題を考え，答えに至ることができる；
・ 社会生活の中で，数，数式，グラフ，あるいは数学的な概念を用いた説明を受けたときに，それによって内容を理解し，その妥当性を判断することができる（誤った説明を見抜くことができる）；
・ そこで使われている数学的概念や考え方のよさ，素晴らしさが理解できる；
・ それらがより高度な数学や他の諸科学につながっていることを理解し，そうしたより高度な理論に興味を持ち，有用性を理解し，必要に応じて学んでいくことができる。（数学の実用的価値のうち市民的部分）

２．一般的に数学におけるものの考え方，方法が自分自身の知的体系やものの考え方といかに密接に関わっているかを，その重要性を含めて理解する（数学の人格陶冶的価値）。

３．最後に数学に学問・文化としての価値を認め，興味を持つこともリテラシーの一つである（数学の文化的価値）。

2.2　対象者の数学との関わりの設定

能動的に用いる数学のレベルと，受動的に関わる数学のレベルとは自ずから差がある。これらを区別しないと混乱が生じる。

・ 日常生活レベルでは，能動的に数学を用いる。
　日常的な身の回りの問題解決のため，知識・技能として私たちが必要な数学は義務教育どころかほとんど小学校の算数レベルであろう。しかし数学の「考え方」は証明，体系的な思考など中等教育レベルで初めて意識的に学ぶものである。これらは中学までの学習で基本的に身に付けてはいるものの，それを自覚できるためには高等学校以上の数学学習レベルも必要になる；
・ 社会生活レベルでは，受動的に数学と関わる。
　各個人は社会生活を送っていく上で，高度な科学文明の所産を使い，報道その他の社会情報に接している。それらはほとんどの場合より高度な数学を用いて用意されており，その内容を理解し，価値や正否を判断するためには，そこで用いられている数学の基本原理や考え方を理解していることがきわめて有効である。義務教育レベルの数学が，より高度な数学や他の学問にどのようにつながっているかを「考え方として」「お話しとして」幾つかの具体例とともに知っていることはとても大切である；
・ 職業レベルで必要とされる数学はここで想定しない。
　しかし一般常識（教養）としてどのような職業でどのような数学が必要であるかを理由まで含めて理解しているのは望ましいことである。

II. 報告書の構成

1.3　数学リテラシーの定着に向けて
2．数学の本質
2.1　数学は「数と図形についての学問」であることを基礎とする
2.2　数学は「抽象化した概念を論理によって体系化する学問」である
2.3　数学は「抽象的で普遍的な言語」である
2.4　数学は「普遍的な構造（数理モデル）の理論」として諸科学に開かれている
3．数学の世界（数学の対象と主要概念）
3.1　数量
3.1.1　数と量
3.1.2　量の性質
3.1.3　数の性質
3.1.4　数の表現・近似
3.1.5　代数系
3.2　図形
3.2.1　空間と図形
3.2.2　図形の性質・計量
3.2.3　図形の表現・幾何学
3.3　変化と関係
3.3.1　関数とその表現
3.3.2　代表的な関数
3.3.3　関数の性質を調べる
3.4　統計と確率
3.4.1　データとその処理
3.4.2　確率
4．数学の方法
4.1　言語としての数学の方法
4.2　知識体系の構築としての数学の方法
4.3　問題解決の方法
5．数学と人間との関わり
5.1　数学と個人との関わり
5.2　数学の用いられ方
6．トピックス
6.1　論理的思考
6.2　円周率
6.3　カーナビ
6.4　［統計に関する例］
6.5　日本語と数学
6.6　［可能ならば］算盤または和算

III. 報告書の概要・キーワード

最終報告書は幾つかのキーワードをめぐって展開される。これをリストアップするとともに，どんな観点からそのキーワードを取り上げるかを併せて述べる。最終報告書では，これらについて詳述するとともに，説明のための具体例が多く加えられることになる。

１． 序文

これは上に述べた基本方針を，整理して分かりやすく述べることになる。

２． 数学の本質（nature）

ここで「数学という『学問』がどのようなものであるか？」を（数学者の立場から）語る。数学は古い学問であるが，同時にその進歩と共に数学自身についての認識も時代とともに変わっている。ここではそうした数学認識の歴史的発展も考慮しつつ，数学の本質（性格）を幾つかの観点から（単純なものから発展的なものへと）並列的に述べることとする。

2.1 数学は「数と図形についての学問」であることを基礎とする。

「数(number)」と「図形(figure)」は，「言葉(language)」とならんで人間が持つ代表的な抽象的認識であるが，数学はこれら数と図形（およびそれらを元に生まれた抽象的概念）を考察の対象にする。つまり他の自然科学と異なり，その対象は最初から抽象的なものであって，そこに数学の特色がある。

「数」はさまざまの「量(quantity)」を認識するものであり，一般的な（言葉によって表される）「質(quality)」とは区別される。最も根本的な「数」は自然数であるが，私たちは単位，比の考え方を用いて一般の量を「実数」を用いて表すことを知っている。現代の数学は，空間的な（多次元の）量をベクトルとして表現し，またこの「数」の概念を広げることにより，さらに広い範囲の「量」を考えることを可能にしている（複素数，有限体)。また数学は，単に静的な確定した量だけでなく，「変化」する量，「不確定性」を持った量も取り扱うことで，その世界をより豊かなものに発展させている（詳しくは「数学の世界」参照)。

「図形」は「空間」(space）内にあるさまざまの「形(shape)」という特別な「質」を認識するものである。このとき数学が行うことは，形の持つ特定の特徴に着目して，他の一切を捨象するという作業であり，数学に特有な定義の厳密化はここに由来する。

さらに図形は「長さ」「角度」など様々の量を持っていることから，図形の量的な性質を調べる（計量）ことが重要であり，逆に様々の量を座標・グラフなどを用いて視覚化することができる。こうした「数」と「図形」のあいだの密接な相互関係が数学をきわめて豊かなものにしているのである。

2.2 数学は「抽象化した概念を論理によって体系化する学問」である

数にせよ図形にせよ，それを扱うために，現実の複雑なもの（complex）の中から，ある概念を抽象化（abstraction）し，その本質を明確化する（数学的に厳密に定義する）のが数学の基本的方法である。この考え方から，数学は，数や図形を出発点として，さらに抽象的な概念を創出してゆく。

その上で現実の持つ複雑性を回復するために，こうした諸概念を体系的（systematic）に結びつけ，一個の有機体として再構成する。その構築を支えるものが論理（logic）である。

［この辺の事情をSFAAでは「数学はパターンと関係の科学である」と言い表している。］

実は概念を抽象化し，それを論理的に組み合わせる，というのは，日常言語の持っている働きでもある。そして人間の知識全体が体系的なのである。これらは人間がものを考え(think)，人間同士が意思を通じ合う（communicate）ための基本前提である（他に「直観」や「レトリック」などがある)。

特に数学では，「抽象化」が単に既知のもののグルーピングにとどまらず，それによって全く異なるものと関連づけられ，その概念自身が新たな豊かさ，広がりを獲得するという事情がよく起こる。

2.3 数学は「抽象的で普遍的な言語」である

数学では，一般的な数や図形を文字で表し，様々の記号を用いた「数式」という文章を書く。定義などでは日常言語を使わざるを得ないが，それは最小限の「数学的に許容される言い方」にとどめ，また意味が曖昧にならないよう十分に注意する。

理論を記述するときの核となる部分は，演繹的推論と呼ばれる特別な「文法」に依拠することにより，一定の前提から，結論を得るプロセス（証明）が，厳密な形で書かれる。この仕組み（論理）は日常言語でも同じであるが，数学では限られた特有の使い方をすることで，「(前提を承認する限り) 反論の余地のない」ものとなる。[これはあくまで数学理論の記述には演繹的推論が必須とされる，と言っているのである。数学の理解や創造には直観その他の精神的活動も用いられ，実際極めて有効である。]

しかしすべての論理の連鎖を書き下すことは効率的でないので，幾つかの「定理」「公式」「アルゴリズム」などのサブルーチンを用いて，記述を効率化する。

こうした方法論は，基本的にユークリッドの「原論」で確立された。これは当時得られていた数学理論全体を体系的に記述したものであるが，後世の様々の学問の「模範」(model) となった。

2.4 数学は「普遍的な構造（数理モデル）の理論」として諸科学に開かれている

数学が言語であるとすれば，数学の理論（数理モデル）は文芸作品と比べられよう。数学が，通常言語の文芸作品と大きく異なるのは，その理論が普遍的で，それゆえ自然や社会を記述するモデルになることである。その有用性は，数学理論自身が強力なサブルーチンとして物事の理解，問題の解決に使えるところにある。つまりある現象が数学理論の要求する諸前提をみたすことが分かれば（モデルであることが分かれば），その理論の結果から現象についての様々の帰結が直ちに得られる。代表例は力学における微分方程式の理論である。文芸作品は個別独自性に価値があるが，数学は普遍性にこそ価値がある。

ただし，数学理論がいつも現象の解明に先だって存在するのではなく，現象の解明への努力が数学理論を生み出すことも多く，その影響は双方向的である。それはニュートン力学の誕生と微分積分学の成立の経過に典型的である。近代科学は数学を自己の言語として採用することによって確立したとも言える。

一方で，全く独自に数学の分野で確立された理論が，あるとき自然の中にモデルとして現れたり，技術の分野で著しい応用があったりする。数学の理論と他の諸科学との関係は密接ではあるが同時に様々である。

また上に述べたように，ユークリッドの「原論」の理論記述体系は，学問の，より広く言えば人間の知識体系の「普遍的モデル」の役割りを果たしてきたと言えよう。

３． 数学の世界

数学は抽象的な学問であると言われ，確かにその扱う対象は抽象的なものであるが，しかしそれらは現実の世界にあることがらやその性質を抽象化したものである。したがって数学の概念や考え方を実際の例を挙げて説明することは，言わば「数学」というめがねで見ると現実の世界がどのように見えるかを述べることに他ならない。

3.1 数量

3.1.1 数と量

・ 数と量　量を表現するものが数であり，数によって表現されるものが量である。数は数学の世界の概念 (concept) であり，量はその自然界における実現 (realization) である。現代は計算器，ある

いはコンピュータの発達によって，複雑な数の計算を手で行う必要は減少しているが，数と量との相互関係の認識，計算の仕組みの理解，あるいは概数，近似などの数の感覚を持つことは変わらず重要である。

3.1.2 量の性質

・ 数が数学という一つの世界の概念であるのに対し，量の場合には，それがどこの世界での実現であるかという「属性」を持っている。これを物理では「次元」とよぶ。量には「単位」があり，その単位を決めることによって，「数」が決まる。［具体例：長さ，面積，体積，重さ，時間，速度，温度等々］

・ 離散と連続 量には，自然数（整数）に対応する離散的な量と，実数に対応する連続的な量がある。離散的な量には「次」があり，連続量にはそれがない。連続量を数として認識するのは，有理数による近似値の形を通してであることが多いが，他にも方程式の解等の表し方があり得る。

3.1.3 数の性質

・ 自然数には，個数（濃度）（一対一対応）と順序との二つの捉え方がある。

・ 数は「大きさ」の概念があることと，「計算」のできることとが二つの本質的な性質である。量を数によって表すときには，これらの性質が大事な役割を果たす。

・ 加法・減法　同じ次元の量の多くではそれらを「加える」ことができる。［このような量を数学教育では「外延量」と呼んでいる。それに対し，比の値として定義される量の多くは「内包量」と呼ばれ，単純に加えることができない］それらの基本性質は加群の公理としてまとめられている。

・ 乗法・除法　代数系としては同じ可換群であっても，量としては加法と乗法は全く違う。乗法・除法は違う次元のものを掛けたり割ったりして，また違う次元の量を作る（長さ×長さ＝面積，道のり（長さ）÷時間＝速度)。同じ次元の量の比（ratio）を作ることで無次元の量（スカラー）を作ること，逆に無次元の量をかけて（スカラー倍）同じ次元の量を作ることもある。

・ 自然数（整数）の除法　自然数による（あまりの出る）割り算は，除法の計算アルゴリズムの基礎として重要であると同時に，約数・倍数などの数論的概念の基礎としても重要である。

・ 順序　個数を含めた多くの量には順序，大小関係があって，対応する数の大小と両立している。その呼び方は量によって様々であるが，その性質は共通している。それらは普通演算とも良い関係がある（順序体の公理)。角度，暦などでは「周期」の存在のために順序関係がない。

3.1.4 数の表現・近似

・ 命数法，十進法　人間は（通常）十進法を基礎とした命数法を用いて効率的に数（自然数）を表すこととした。日本では中国の合理的な命数法を用いてきたので，ヨーロッパ諸国のような複雑な数え方がなく，算数教育で余分な労力が不要である。

・ 記数法　さらに０を導入することによって位取り記数法が可能になった。四則演算（筆算）のアルゴリズムが容易に書けるなどの利点があり，私たちはそのおかげを蒙っている，人類の最大の発明の一つである。日本ではアラビア数字による（位取り）記数法は明治期以降普及したが，すでにそれ以前に実質的に同値な位取り記数法であるそろばんによる数の表示が広く一般化していた。コンピュータの普及とともに２進法の重要さも増している。

・ 連続量を数学で一般的に表すには「近似」を用いなければならない。近似数の表記法としては，小数と分数の二つがある。小数の四則演算は，位取り記数法を用いれば，整数のそれと全く同じアルゴリズムで実行できること，誤差評価が容易であることなどの利点がある。

・ 有理数　整数の比の値として有理数（元来の意味は「有比数」）の概念が得られるが，その表示方

法に重点を置いて言う場合は「分数」と呼ばれる。分数は単位分数として捉える仕方もある。分数の四則演算が定義できるが，後者の立場では加減法が，前者の立場では乗除法が自然に定義される。前者の立場に立つ加減法，後者の立場に立つ繁分数の乗除法は理解が難しい。

・ 近似（概数）　順序によって二つの量の「近さ」（絶対値）が定義できる。これによって，おおよその数に「丸める」こと（それで大きさのイメージをつかむことが出来，計算が簡単になる），欲しい誤差の中に収まるように近似することなどができる。
・ 有限小数は有理数である。逆に有理数は必ず有限小数かまたは無限循環小数として表される。無限小数はある実数を表し，任意の実数は有限小数または無限小数で表すことが可能である。
・ 数直線（座標）・グラフ　数はまたその代表的な量である「長さ」に変換することによって，視覚的に表現される。私たちが長さを測る，つまり量を数に変えるときは「物差し」を使ってはかるのであり，この「物差し」の概念を抽象化したものが数直線（1 次元）座標に他ならない。そしてこれによってあらゆる「量」を（数を通して）視覚化することができる。特に二つ（またはそれ以上）の量の関係を視覚化するものとしてのグラフはあらゆる場で用いられる。

3.1.5 代数系［未完成］

3.2　図形

3.2.1 空間と図形

・ 空間　私たちは，３次元空間の中で生きており，その中で視覚的に様々のものを認識して，取り扱っている。その際視覚的対象の形を，類似性と差異とによって分別し，体系付ける。多くの場合それらはある特徴（性質）だけに着目した，理想化された概念である「図形」（figure）として数学の中に取り込まれる。点，直線，平面，円，三角形，多角形，多面体といった私たちになじみの深い図形たちはいずれも現実にあるイメージを理想化したものである（まっすぐな線→直線，丸い形→円等々）。その概念の定義は，（少数の例外［無定義用語］を除き）数学的に明確なものとなっている（例：円＝平面内の，ある点（中心）からの距離（半径）が一定である点の軌跡［集合]）。
・ 次元　図形の性質として，一番粗いものは，その広がりの「次元（dimension）」である。私たちの空間は３次元なので，普通「図形」としては０次元，１次元，２次元，３次元しかない。

3.2.2 図形の性質・計量

・ 図形の性質としては，二つまたはそれ以上の図形の関係（相対的位置）が重要である（交わる，平行，接する等）。また同じ名前で呼ばれる二つの図形が，同じ形であるかどうか（相似），形も大きさも同じであるかどうか（合同）も基本である。
・ 計量　数学としての図形の性質の探究は，人類文明の発祥以来の現実の問題に根ざしている。それは「幾何学」の語源が「測地」という意味であることからも知られる。人々は，土地の様子を知り，地図を作り，また建築物等を造営するために図面を作り，図形の様々の性質を応用した。ここでは長さ，角度，面積などの量を数値化する必要があり，数を用いて図形の性質を記述することが行われる。このように量を用いて表される図形の性質を「計量的（metrical）性質」とよぶ。
・ 移動　二つの図形が合同あるいは相似であるかどうかを検証するには，単に静止した（static）事物として見るのではなく，一方を「移動」し，必要なら拡大縮小を行って「重ね合わせる」という動的（dynamic）作業が必要になる。特に平行移動，回転，反転，拡大縮小といった特殊な操作の重要性と性質は古くから知られた。現代はコンピュータの発達によって，こうした作業を単にイマジネーションだけではなく，目に見える形で容易に行えるようになっている。

・ 変換　図形を調べるには，形を変えないものだけではなく，ある程度形が変わる図形の動かし方も大切である。図形の長さや角度を徐々に変えていって性質がどう変わるか等々。
・ 射影　空間図形の現実的な取り扱いで重要になるもう一つの概念は，ある視点からの投影あるいは射影（projection）である。これは私たちが３次元のものを２次元の機能で認識している，という生物的事実に基づく。
・ 対称性　図形の性質で特に重要なものとして，「対称性」（symmetry）がある。ある（平面）図形が対称性を持つとは，平行移動，回転あるいは反転によって自分自身に重なりうることである。一般に高い対称性を持つものほど特殊な（数学的に）「美しい」図形であるとされる。同じ辺数の多角形の中では正多角形が一番対称性が多く，また連続的な対称性を持つ図形は平面内では（平面自身を除けば）直線と円である。

3.2.3 図形の表現・幾何学

・ 座標　こういった作業を数学的に行うためには，「座標」の概念が欠かせない。これは高等学校で初めて学ぶものではあるが，考え方としては，１次元での「長さ」，３次元での「縦・横・高さ」といった呼び名で，小さいときからすでに感覚的には身に付けている。また２次元的な座標はグラフを書く上で，実質的に小学校から使われている。ただし「座標」はいわば空間全体に導入した「物差し」である。これによって空間の「位置」の情報が数で表される。いくつの数が必要かが，考えている空間の次元を表す。また球面座標も天体の位置を表す手段として古代から用いられている（天球は正確には半球）。
・ 位相　幾何学で「量」によって表される計量的性質が基本であるが，これに依存しない幾何的な性質もある。例えば「くっついている—はなれている」。こうした性質は「位相的な性質」とよばれ，それを明らかにすることは近代数学になって初めて意識化され実行された。
・ 理論体系の記述　図形についての概念，あるいは図形間の関係を表す概念の性質を理解し，その概念や性質相互の関係を理解するために，ユークリッドは幾つかの基本的命題（公理，公準）と数学的な定義から演繹的推論（証明）に基づいて体系的に理論を記述するという方法を確立し，これは数学的な認識およびその記述方法のモデルとなった。
・ 図形には様々の不思議な性質があり，しかもそれらが一見関係のなさそうなより基本的ことがらから，しばしば補助的な図形の助けを借りて一挙に説明されるなど，数学の中でも，単に有用というだけではなく，最も古くから，最も多くの人々を魅了し続けてきた分野であると言えよう。

3.3 変化と関係

3.3.1 関数とその表現

・ 二つの量の間の関係（relation），特に時間との関係を変化（change）という。変化を抽象化したものが（ある量に依存して別の量が定まる）「（実）関数（function）」である。［さらに抽象化したものとして「写像（map）」がある。］［比例；反比例；関数；周期性；収束（収束の速さ）；発散（増大度）；グラフ；多項式関数；指数関数；対数関数；三角関数］
・ 私たちが日常的，あるいは社会的にふれる量は，単独で存在することよりも，時間その他の状況によって様々に変化する場合が多い。このような量の変化，あるいは状況を表すパラメータ（１個とは限らない）への依存の仕方を調べることが重要で，数学はそのための様々な手段を開発してきた。
・ 一般的な関数は，ある種のブラックボックスである。それを記述する方法としては，数式で表す，グラフで表す，表で表す，など様々の方法があり，それぞれに特徴を持っているので，考えている

問題に応じて，適当な手段を取る必要がある。

3.3.2 代表的な関数

・ 数学は，そうした変化（関数）の最も基本的なものとして，正比例（または一次関数），反比例，多項式的変化（特に２次変化），指数的変化，対数的変化，周期的変化などを考える。これらが現実の世界の様々の場に現れること，その変化の型（一定量の乗法的あるいは加法的）増加に従って値がどう変化するか）の特徴を知ることがまず基本である。[本報告では，できるだけ具体例を多く入れる]

・ これらの関数のうち前２者は代数的に表すことができ，基本中の基本である。これで表せない最も簡単な変化は２次多項式で表せるもの，あるいはその一般化として，多項式関数，有理関数で表せる変化がある。これらをまとめて代数的な変化とよぶ。[受動的レベル：後の３者は，代数的ではないが，指数関数，対数関数，三角関数といういずれも性質のよく分かっている関数である。前二者にあっては，乗法的関係と加法的関係が交互に入れ替わることにその特徴があり，三角関数では円の上の回転運動と関連づけて考えるのが最も自然である（最終報告書ではもっと丁寧に現実の例も挙げて書く）。]

3.3.3 関数の性質を調べる

・ 関数については，その変化の様子を関数の形，グラフその他から読み取り，現実の問題でどのような意味があるかを考えることが大切である。それは増加，減少に始まり，急に増加する，発散する（爆発する），ある値に漸近していく，周期的に繰り返す，などの性質がある。

・ [受動的レベル：局所的な関数の挙動を調べる有力な方法として，微分積分学がある。これは（数値）関数としては瞬間変化率あるいは一次近似，グラフとしては接線として理解される。図形では，曲線や曲面の「曲がり具合」なども微分積分学の概念を用いて調べることができる。速度計や電流計は導関数を測っている（もっとも道のりや電気量をこの積分量と考える方が物理的には自然かも知れない）]

・ [受動的レベル：関数そのものがすぐ数式で書けないとしても，その性質から例えば微分方程式の解として関数が記述できる場合がある。このときそれを数学的に解いて解を書ける場合もあるが，たとえ陽に解けなくとも，その解の関数の様々な性質を微分方程式としての性質から導くことが可能である。さらに近年はコンピュータの発達により，数値的に近似計算で解を求め，あるいは微分方程式さえ知られていなくともシミュレーションでその関数の性質を調べるという方法が広く行われるようになっている。]

3.4 統計と確率

不確実さを持ってしか定まらない量を確率的な量（stochastic quantity）という。そうした量を扱う学問が統計学（statistics）であり，その数学的基礎を与えるのが確率論（probability theory）である。

3.4.1 データとその処理

・ データ　統計という名前で扱われる対象はデータである。データは、それから他の情報が導ける事実のことで、数あるいは文字の形をとっていて、コンピュータで取り扱えるもの（数値等）の総称である。データが英語において複数形で扱われるのは、それが複数の数値等の集まりだからである。データは、数値一般の特徴を反映して、言語を超えた万国共通の規準で理解できる。しかも多くの場合、他の言語表現より情報量が大きい。データを適切に利用することは、根拠のない偏見・盲信を除くのに役立つ。しかしそれは、その信用性と一般性を利用した欺瞞・詐欺をもたらす危険もは

らんでいる。データの扱い方をリテラシーとして重視すべきなのはこの両側面がデータ内に同居しているためである。

- 確率　確率は、ある事象・現象がどの程度の頻度あるいは確からしさで起こるかを、０と１の間の数値で表したものである。その数値の意味は、多くの場合「今日の午後に名古屋市で 1㎜ 以上の雨が降る確率が 30%ということは、こういう予報が出たとき 10 回中３回くらい雨が降り残りの７回くらいは雨が降らないことである」というように説明される。現実社会で確率として持ち出される数値を情報あるいは命題の確からしさの目安として利用する場合には、その数値を細かく解釈するのではなく、おおよその大小関係に注目すべきである。
- 情報としての役割　われわれの生活に登場する情報には、それ自体を数値で表現・集約・伝達するという側面と、情報の不確定性・可能性の大きさ・曖昧さを数値で認識・表現するという側面とがある。前者を代表するのがデータであり、後者を代表するのが確率である。
- 情報の縮約　人間は多くの数値等を一挙に理解・処理する能力を持っていない。そこでわれわれがデータを扱うときは、⑴ 少数の代表値で全体の傾向を把握する、⑵ 図表現で感覚的に情報を認識する、⑶ 標準化・比率化を通して意味を認識しやすく加工する、といった技法を使ってデータの中の情報を集約する。
- 誤差的変動　われわれが扱うデータは、本来認識したい事柄の一部に過ぎず、しかも誤差・雑音というべき偶然的・非法則的変動、すなわち誤差的変動を含んでいる。そこで ⑷ データの背後にある真の状態・法則性を追求する、⑸ 因果関係・相関関係といった関連する事柄間を明らかにする、⑹ 誤差的変動の大きさを評価してそれに左右されない認識を行う、といった作業が必要になる。
- 代表値と図表現　データの量、平均値、標準偏差を指標としてデータの傾向を数値で示すことは、データ処理に必須な第１段階である。数値が集団としてあるときは、ヒストグラムや箱ひげ図で分布を表現することが情報の認識に有効である。割合や時間変化を把握するには、棒グラフ、帯グラフ、円グラフ、レーダー図、折れ線グラフ、等を使うべきである。その際、各軸に変数の名前、単位、物理的意味が分かる説明をつけることは必須なことである。図表示は、直感に理解を委ねるものであるが故に、錯覚を起こさせやすいことも特徴である。
- データの変換　測定、観測といった操作で手に入れた生データを、認識したい法則性を理解しやすいように変換することも、ほとんどの場合、データ処理に必須である。しかしこのような指標化とそこに生じやすい、誤った理解については十分な成人教育が必要である。
- 母集団についての推測 データから知りたいことは、標本のことではなく、母集団での状況である。これを調査データから推測する際には、標本が母集団を偏りなく代表していることが必須である。
- 関係 因果関係があれば一般には相関関係がデータに表れるが、相関関係が見られたからといって、それを即、因果関係と見ることは正しくない。
- 誤差評価　データに基づいて法則性の認識を行うとき、統計学では法則性を数学的モデルで認識しようとする。その際、データが適合しない部分を誤差という概念で理解すると、法則性を適切に評価できることが多い。誤差とは、予測不能、制御不能、測定不能、不可避、不確定性を持つ、情報獲得に障碍となる、データに入り込むばらつき・変動部分のことで、原理的属性としては、互いに独立で平均的にゼロと想定できる確率変数と定式化される。データ処理において誤差という概念を利用することは、予測や推測における過剰な誤認識を抑えるのに役立っている。

3.4.2 確率

- 事象　確率は、起こる（真である）可能性と起こらない（偽である）可能性とをもつ、「事象」と

呼ばれる命題に対して与えられる数値である。その数値は観測を多数回反復したときにその事象が起こった回数の相対頻度、というイメージを抽象化・一般化したものである。

・ 起こりやすさと確からしさ　確率という概念は、未来に起こる事象の起こりやすさとして導入されるが、実用上では、すでに起こっていることの確からしさを評価する場合にも利用される。

・ 確率の加法性と事象の独立性　「同時に起こりえない複数事象のどれかが起こる確率はそれぞれが起こる確率の和である」、というのは公理として定められる確率の性質である。ほとんど無関係の事象が同時に起こる確率はかけ算で計算してよいというのは、頻度論の立場から見たとき合理的であるが、確率の公理というものではない。

・ 確率モデル　同じ状態を多数回観測して確率を評価することは、思考の世界や模擬実験の世界でのことで、現実問題では使えないのが普通である。現実の確率はいろいろな関係を、確率モデルという数式で表現して計算される。

・ 確率過程と時系列　3日後の天気のように未来に起こることの確率は、過去に現れた事象についての法則性が未来も成り立つ、ということを前提にしている。このように時間を導入した確率モデルを確率過程という。確率過程の実現結果と見られるものが時系列である。

・ ベイズ確率　実際に起こった事象の原因が何であるかを確率的に評価するときにはベイズ確率を利用するのが普通である。

４．　**数学の方法**（cf. process – competencies）

［ここの部分は重要であるが，まだ成案を得ていない。現在の段階でのキーワードの「素案」を記す。］

数学は普遍的な言葉の学問として，その学問を推し進めていくための方法を持つ。

学問を進める　＝　考える（think）

数学の方法について述べる＝「考える」ということを数学のめがねでみるとどのような行為になり，どんな性格を持っているのかを述べる

考えるプロセス：「認識（理解）する」（recognize, understand），「（狭い意味で）考える」（consider, contemplate），「表現する（伝え合う）」（represent, communicate）。これを数学の言葉で行うのが，数学の方法である。

問題解決プロセス：問題を数学の言葉で言い表す（formulate），数学の問題として解決する（solve），解を本来の問題に適合する形で表現する（represent），適切かどうかをチェックする（check and feedback）。

4.1　言語としての数学の方法

１．　数学語の語（word）…数学用語・記号・文字／グラフによる「読み書き」

２．　数学語の文（sentence）…定義・命題（公理，定理，仮説，例など）・数式

３．　数学語の文章（composition）…形式論理（真偽・三段論法・必要十分・逆裏対偶）／証明／（式）計算／アルゴリズム

４．　図表現（graphic presentation）…グラフ/図

4.2　問題解決・知識体系の構築としての数学の方法

１．　数学の理論体系・構造・モデル（限界を含む）（定義・公理体系・定理・アルゴリズム）

２．　問題の数学化・定式化

３．　数学内での問題解決の方法

3a. 推論…分析・総合，帰納・演繹

３b. 抽象化・具体化（概念のヒエラルヒー化）
３c. 類推・平行性［一番大事なのは，数と幾何の平行性］
３d. 例・シミュレーション（コンピュータ等の利用を含む）
４． 解の吟味

これらは数学以外からの問題を解決するプロセスを含めて想定しているが，数学は例えば初等幾何学を学ぶ中で，数学内でこうした思考プロセスを訓練している。いわば知的体系の toy model としてユークリッド幾何学は今も大きな教育的意味を持っている。数学は知識体系そのもののモデルなのである。

５．数学と人間とのかかわり

5.1 数学と個人との関わり
１． 日常生活での数学の利用；
２． 職業における数学の利用；
３． 社会生活での数学の理解・それによる判断；
４． 文化としての数学の享受

5.2 数学の用いられ方
１． 現実の問題を数学を用いて解決する（他分野との関係を含む）；
２． 自らの知的体系をより充実させる（学習）；
３． 人類全体の知的体系をより充実させる（研究）

６．トピックス

6.1 論理的思考
6.2 円周率
6.3 カーナビ
6.4 偏差値など統計に関する具体例
6.5 日本語と数学　１．日本語はむしろ（数学的）構造が明確な言語である；２．日常用語と数学用語の微妙な違い
6.6 ［可能ならば］算盤（または和算）